INFORMATION AND CONTROL 38, 264–287 (1978)

Un codage non commutatif pour certains systèmes échantillonnés non linéaires*

MICHEL FLIESS

Université Paris VIII
et
Laboratoire des Signaux et Systèmes, C.N.R.S.–E.S.E., Plateau du Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France

Formal power series in several non-commutative indeterminates play for the realization of regular (i.e. (internally) bilinear) systems the same rôle as transfer functions for linear stationary ones.

INTRODUCTION

Les fonctions de transfert représentent l'outil de base pour la réalisation des systèmes automatiques linéaires et stationnaires. Nous montrons ici que les séries formelles en plusieurs indéterminées non commutatives jouent un rôle analogue pour les systèmes réguliers (ou bilinéaires) de la forme

$$\begin{cases} q(t+1) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i\right) q(t), \\ \qquad y(t) = \lambda q(t). \end{cases}$$

Le vecteur d'état $q(t)$ appartient à un espace vectoriel Q; $A_0, A_1, \ldots, A_n$: $Q \to Q$ sont linéaires comme l'application de sortie λ; $u_1, \ldots, u_n$ sont les entrées. La dimension finie de Q équivaut à la rationalité de la série non commutative.

* Travail effectué sous l'auspice de la convention de recherche 76 133 de l'I.R.I.A.-S.E.S.O.R.I..

0019-9958/78/0383-0264$02.00/0

Rappelons qu'en vertu d'un résultat dû à l'auteur et H. J. Sussmann, les systèmes réguliers, d'espace d'état de dimension finie suffisent, en temps continu, à approcher tout système non linéaire "continu". D'où un intérêt pratique indéniable, bien que cela ne soit plus vrai en temps discret.

Les liens entre théories des automates et des systèmes ont été pressentis depuis longtemps (cf. Kalman *et coll.*, 1969; Eilenberg, 1974; Brockett et Willsky, 1972;...). Notre approche élucide cette question. Les séries rationnelles non commutatives ont, en effet, été introduites par Schützenberger (1961), il y a plus de quinze ans, en liaison avec diverses questions d'informatique théorique. On comprend alors qu'un système régulier à temps discret est, à peu de chose près, un automate pondéré. Cette ressemblance n'est pas académique. Elle permet de caractériser complètement les systèmes réguliers non autonomes, d'espace d'état de dimension finie, de façon strictement analogue à ce qui a été fait pour les automates variables avec le temps (Agasandjan, 1967). Cela s'applique aux systèmes linéaires, ce qui résoud un problème pendant depuis longtemps.

Une bonne partie des résultats a déjà été publiée par l'auteur (1973, 1974b, c, d, 1976) sous une forme très succinte.

Le codage par indéterminées non commutatives a été étendu par Sontag (1976b) à d'autres classes de systèmes non linéaires en temps discret. Il s'applique aussi, et surtout, au temps continu (cf. l'auteur, 1976), où il nous semble que la présente théorie trouve toute son ampleur.

Terminons en soulignant tout ce que notre approche doit aux travaux et conseils du Professeur R.E. Kalman (1960, 1968, 1969, 1976). Cet article n'aurait jamais pu être écrit sans les invitations qu'il nous a adressées, en 1973 et 1977, à séjourner au Center for Mathematical System Theory qu'il dirige à l'Université de Floride à Gainesville.

I. RAPPELS SUR LES SÉRIES FORMELLES NON COMMUTATIVES

1. Définitions et propriétés générales

(a) *Séries formelles*

Soit X^* le *monoïde libre* engendré par un ensemble fini non vide X. Un élément de X^* est appelé *mot*. L'élément neutre, ou mot *vide*, est noté 1. La *longueur* $|w|$ d'un mot w est le nombre de lettres dont il est composé: $|x_1x_2x_1^2| = 4$. La longueur du mot vide est nulle. Pour tout $x \in X$, $|w|_x$ désigne le nombre d'occurences de x dans w: $|x_1x_2x_1^2|_{x_1} = 3$, $|x_1x_2x_1^2|_{x_2} = 1$. Il est clair que

$$|w| = \sum_{x \in X} |w|_x .$$

Soient K un corps commutatif, $K\langle X\rangle$ et $K\langle\langle X\rangle\rangle$ les K-algèbres des *polynômes* et des *séries formels*, à coefficients dans K, en les indéterminées (ou variables) associatives $x \in X$ (non commutatives si $card\, X \geqslant 2$). Un élément $s \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est noté

$$s = \sum \{(s, w)w \mid w \in X^*\}, \qquad \text{où} \qquad (s, w) \in K.$$

Addition et multiplication sont définies par

$$s_1 + s_2 = \sum \{[(s_1, w) + (s_2, w)]w \mid w \in X^*\},$$
$$s_1 s_2 = \sum \Big\{ \sum_{uv=w} [(s_1, u)(s_2, v)]w \mid w \in X^* \Big\}.$$

Dans le cas où X est réduit à une seule lettre x, on retrouve les algèbres commutatives usuelles $K[x]$ et $K[\![x]\!]$ des polynômes et des séries en une indéterminée.

(b) *Rationalité*

Une série s est inversible ssi son terme constant $(s, 1)$ est non nul. Une sous-K-algèbre R de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ est *rationnellement close* ssi l'inverse de toute série inversible de R appartient encore à R.

La K-algèbre $K\langle(X)\rangle$ des séries *rationnelles* est la plus petite sous-algèbre rationnellement close de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ qui contienne $K\langle X\rangle$.

Remarque. Dans le cas d'une seule indéterminée x, toute série rationnelle est développement de Taylor à l'origine du quotient P/Q de deux polynômes P, $Q \in K[x]$, $Q(0) \neq 0$.

${}^M K^N$ désigne l'ensemble des matrices à M lignes et N colonnes. Un exposant égal à 1 peut être omis: on écrit ${}^M K$ pour ${}^M K^1$ (matrices colonnes d'ordre M) et K^N pour ${}^1 K^N$ (matrices lignes d'ordre N). Une *représentation* (matricielle) $\mu: X^* \to {}^N K^N$ est un morphisme du monoïde X^* dans le monoïde multiplicatif des matrices carrées d'ordre N.

THÉORÈME 1 (dit de Kleene-Schützenberger).[1] *Une série $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est rationelle si et seulement s'il existe un entier $N \geqslant 1$, une réprésentation $\mu: X^* \to {}^N K^N$, des matrices ligne $\lambda \in K^N$ et colonne $\gamma \in {}^N K$ tels que*

$$r = \sum \{(\lambda \mu w \gamma)w \mid w \in X^*\}.$$

Remarques. (i) Avec des modifications mineures, la rationalité peut encore être définie quand les coefficients appartiennent à des anneaux ou semi-anneaux (cf. Eilenberg, 1974; l'auteur, 1974a). Le théorème de Kleene-Schützenberger reste vrai. Avec le semi-anneau de Boole $B = \{0, 1\}$, où $1 + 1 = 1$, on retrouve la théorie des langages formels et des automates, ainsi que le résultat originel de Kleene.

[1] Voir Schützenberger, 1961; Eilenberg, 1974; l'auteur, 1974a.

(ii) Dans le cas d'une seule variable, le théorème de Kleene-Schützenberger est équivalent aux relations de récurrence linéaires à coefficients constants, auxquelles obéissent, à partir d'un certain rang, les coefficients de séries rationnelles.

2. Matrices de Hankel[2]

(a) *Définition*

Associons à toute série $s \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ un tableau infini, appelé *matrice de Hankel* et noté $\mathscr{H}(s)$, dont lignes et colonnes sont indexées par X^* et tel que l'élément d'indice $(u, v) \in X^* \times X^*$ soit le coefficient (s, uv).

Le *rang* de la matrice de Hankel, que l'on nomme aussi rang de la série, est par définition:

— zéro ssi la série, et donc la matrice, sont nulles;
— fini, non nul, égal à ρ, ssi l'on peut extraire un sous-déterminant non nul d'ordre ρ et si tout sous-déterminant d'ordre $\rho + 1$ est nul;
— infini autrement.

(b) *Modules sériels*

Un *$K\langle X \rangle$-module sériel* gauche est un triple (E, c, l) où:

— E est un $K\langle X \rangle$-module gauche,
— c est un élément de E,
— l: $E \to K$ est une application K-linéaire.

A un tel module sériel correspond la série

$$s = \sum \{(lwc)w \mid w \in X^*\}.$$

Réciproquement, à une série $s \in K\langle\langle X \rangle\rangle$, on peut faire correspondre un module sériel gauche (E, c, l), où E n'est autre que $K\langle X \rangle$ considéré comme $K\langle X \rangle$-module gauche, c le polynôme unité 1, l l'application qui à $p \in K\langle X \rangle$ fait correspondre

$$\sum \{(p, w)(s, w) \mid w \in X^*\}.$$

Un morphisme φ: $(E, c, l) \to (E', c', l')$ de $K\langle X \rangle$-modules sériels gauches est un morphisme du $K\langle X \rangle$-module E dans le $K\langle X \rangle$-module E', tel que $\varphi c = c'$, ${}^t\varphi l' = l$ (${}^t\varphi$ désigne l'application duale de φ considéré comme application K-linéaire). On a isomorphisme ssi φ est un isomorphisme entre E et E'.

[2] Voir l'auteur, 1974a.

(E, c, l) est dit *réduit* ssi $E = K\langle X\rangle c$ et si $\{n \mid n \in E, l(K\langle X\rangle c) = 0\} = \{0\}$. Soient

$$\mathfrak{N} = \{n \mid n \in K\langle X\rangle c, l(K\langle X\rangle c)n = 0\}$$

un sous-$K\langle X\rangle$-module de $K\langle X\rangle c$, $R = K\langle X\rangle c/\mathfrak{N}$, $\sigma: K\langle X\rangle c \to R$ l'épimorphisme canonique. Il existe une application K-linéaire $l_0: R \to K$ telle que la restriction de l à $K\langle X\rangle c$ soit égale à $l_0\sigma$. (R, c_0, l_0), où $c_0 = \sigma c$, est clairement un module sériel réduit. Deux modules sériels réduits associés à une même série sont à l'évidence isomorphes.

On peut doter le K-espace vectoriel $\mathfrak{C}$ sous-tendu par les colonnes de $\mathscr{H}(s)$ d'une structure de $K\langle X\rangle$-module gauche: un mot $u \in X^*$ opérant sur la colonne d'indice $w \in X^*$ lui fait correspondre la colonne d'indice uw. Considérons le $K\langle X\rangle$-module sériel gauche $(\mathfrak{C}, \mathfrak{c}_1, \alpha)$, où $\mathfrak{c}_1$ est la colonne d'indice le mot vide, $\alpha: \mathfrak{C} \to K$ l'application K-linéaire qui à toute colonne associe le coefficient de la ligne d'indice le mot vide. $(\mathfrak{C}, \mathfrak{c}_1, \alpha)$ produit la série s.

PROPOSITION 2. *$(\mathfrak{C}, \mathfrak{c}_1, \alpha)$ est un $K\langle X\rangle$-module sériel gauche réduit.*

Preuve. En effet, $\mathfrak{C} = K\langle X\rangle\mathfrak{c}_1$. Si $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}$, $\alpha(K\langle X\rangle\mathfrak{c}) = 0$ implique la nullité des lignes de $\mathfrak{c}$. ▌

Remarques. (i) La matrice de Hankel fournit ainsi une interprétation remarquable du module sériel réduit.

(ii) Il faut comprendre la notion de module sériel comme une généralisation de celle d'automate. L'idée de module apparaît aussi chez Heller (1967), Kalman (1968, 1969) et Eilenberg (1974).

(c) *Rang fini*

THÉORÈME 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ soit rationnelle est qu'elle soit de rang fini $\bar{N}$. Il existe alors une représentation $\bar{\mu}: X^* \to {}^{\bar{N}}K^{\bar{N}}$, des matrices ligne $\bar{\lambda} \in K^{\bar{N}}$ et colonne $\bar{\gamma} \in {}^{\bar{N}}K$ telles que*

$$r = \sum\{(\bar{\lambda}\bar{\mu}w\bar{\gamma})w \mid w \in X^*\}.$$

On peut déterminer:

— *deux ensembles de $\bar{N}$ mots $\{d_j\}_{j=1}^{\bar{N}}$, $\{g_i\}_{i=1}^{\bar{N}}$;*
— *une application $\chi: X^* \to {}^{\bar{N}}K^{\bar{N}}$ définie, pour tout $w \in X^*$, par $(\chi w)_{i,j} = (r, g_iwd_j)$ $(i, j = 1,..., \bar{N})$, telle que $\chi 1$ soit inversible et vérifiant $\chi w = \chi 1\bar{\mu}w$;*
— *$\bar{N}^2$ matrices $m_{i,j} \in {}^{\bar{N}}K^{\bar{N}}$ $(i, j = 1,..., \bar{N})$ vérifiant, pour tout $w \in X^*$, $\bar{\mu}w = \sum_{i,j} m_{i,j}(r, g_iwd_j)$.*

Soient un entier $N \geqslant 1$, une représentation $\mu: X^* \to {}^N K^N$, des matrices ligne $\lambda \in K^N$ et colonne $\gamma \in {}^N K$ tels que

$$r = \sum \{(\lambda \mu w \gamma) w \mid w \in X^*\}.$$

Alors $N \geqslant \bar{N}$. Si $N = \bar{N}$, il existe une matrice inversible $P \in {}^{\bar{N}}K^{\bar{N}}$ telle que: $P\mu w P^{-1} = \bar{\mu} w$, $\bar{\lambda} P = \lambda$, $P\gamma = \bar{\gamma}$ (les représentations μ et $\bar{\mu}$ sont donc semblables).

Preuve. (i) Soit $r \in K\langle(X)\rangle$ définie par:

$$r = \sum \{(\lambda \mu w \gamma) w \mid w \in X^*\},$$

où μ, λ, γ, qui ont la signification habituelle, sont de dimension N. Le K-espace vectoriel sous-tendu par les colonnes de $\mathscr{H}(r)$ est de dimension finie: c'est un sous-espace vectoriel de celui engendré par les N colonnes dont les coefficients d'indice w sont ceux du N-uple $\lambda \mu w$. D'où la finitude du rang.

(ii) Soit $r \in K\langle(X)\rangle$ de rang fini $\bar{N}$. Il existe deux ensembles de $\bar{N}$ mots $\{d_i\}_{i=1}^{\bar{N}}$, $\{g_j\}_{j=1}^{\bar{N}}$ tels que le déterminant de la matrice $[(r, g_i d_j)]$ d'ordre $\bar{N}$ soit non nul. Pour deux mots quelconques $u, v \in X^*$, il vient:

$$(r, uv) = \sum_{i,j} m_j(v)(r, ud_j), \tag{1.1}$$

où $m_j(v) = (-1)^{j+\bar{N}} \Delta_j(v)/\det[(r, g_i d_j)]$, $\Delta_j(v)$ étant le déterminant de la matrice obtenue en remplacant d_j par v dans $[(r, g_k d_l)]$. La formule (1.1) exprime que les colonnes d'indices $d_1, \ldots, d_{\bar{N}}$ forment une base du K-espace vectoriel engendré par les colonnes de $\mathscr{H}(r)$.

Soient $\bar{\mu}$, $\chi: X^* \to {}^{\bar{N}}K^{\bar{N}}$ les applications définies par $(\bar{\mu} w)_{i,j} = m_i(wd_j)$, $(\chi w)_{i,j} = (r, g_i w d_j)$. En vertu de (1.1), il vient:

$$\chi w = \chi 1 \bar{\mu} w. \tag{1.2}$$

Comme $\chi 1$ est inversible, on vérifie que $\bar{\mu}$ est une représentation. Soient $\bar{\lambda} \in K^{\bar{N}}$ et $\bar{\gamma} \in {}^{\bar{N}}K$ les matrices ligne et colonne dont les j-èmes coefficients sont respectivement (r, d_j) et $m_j(1)$. De (1.1), on déduit:

$$r = \sum \{(\bar{\lambda} \bar{\mu} w \bar{\gamma}) w \mid w \in X^*\}.$$

(1.2) permet de déterminer $\bar{N}^2$ matrices $m_{i,j} \in {}^{\bar{N}}K^{\bar{N}}$ telles que

$$\bar{\mu} w = \sum_{i,j} m_{i,j}(r, g_i w d_j).$$

(iii) Soit $r \in K\langle(X)\rangle$ donnée comme en (i). A μ, λ, γ on peut associer le module sériel gauche (E, c, l) où:

— $E = {}^N K$, K-espace vectoriel sur lequel opèrent canoniquement les matrices μw et que l'on peut considérer comme un $K\langle X\rangle$-module gauche;

— $c = \gamma$;

— l est l'application repérée par λ, c'est-à-dire telle que $lwc = \lambda\mu w\gamma$.

Les assertions du théorème concernant les liens entre μ, λ, γ et $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\gamma}$ apparaissent alors comme la traduction en langage matriciel des propriétés des modules sériels réduits. ▮

La représentation $\bar{\mu}$, qui est définie à une similitude près, est dite *réduite* (ou *minimale*).

Corollaire. *Pour qu'une série $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ soit rationnelle, il faut et il suffit que le K-espace vectoriel sous-tendu par les colonnes (ou les lignes) de la matrice de Hankel soit de dimension finie. La dimension de ces deux espaces vectoriels est égale au rang de r.*

Remarque. Dans le cas d'une seule indéterminée, les liens entre séries rationnelles et matrices de Hankel de rang fini sont classiques.

(d) *Dualité entre lignes et colonnes*

On construit de même les $K\langle X\rangle$-modules sériels droits avec des propriétés de réduction identiques. Les lignes de la matrice de Hankel peuvent être dotées d'une structure de $K\langle X\rangle$-module sériel droit $((\mathfrak{L}, \mathfrak{l}_1, \beta)$, qui est réduit.

$(\mathfrak{C}, \mathfrak{c}_1, \alpha)$ désignant le $K\langle X\rangle$-module droit engendré par les colonnes de la matrice de Hankel, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{L}$ sont en dualité: à la ligne et à la colonne d'indices u, $v \in X^*$, on associe le coefficient (s, uv).

On note $\tilde{w} = x_{j_0} \cdots x_{j_{k-1}} x_{j_k}$ l'image *miroir* du mot $w = x_{j_k} x_{j_{k-1}} \cdots x_{j_0}$. L'image miroir de la série $s \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est

$$\tilde{s} = \sum \{(s, w)\tilde{w} \mid w \in X^*\}.$$

La matrice de Hankel de $\tilde{s}$ est la transposée de $\mathscr{H}(s)$: il y a échange des lignes et des colonnes.

II. SYSTÈMES RÉGULIERS

1. Définition

Un système, ou asservissement, régulier, ou bilinéaire, a la description interne suivante:

$$\begin{cases} q(t+1) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i\right) q(t), \\ y(t) = \lambda q(t) \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{2.1}$$

Le vecteur d'*état* $q(t)$ appartient au K-espace vectoriel Q non nécessairement de dimension finie ($q(0)$ est donné); $A_0, A_1, \ldots, A_n: Q \to Q$, $\lambda: Q \to K$ sont des applications K-linéaires; $u_1, \ldots, u_n: \mathbf{N} \to K$ sont les *entrées* (ou *commandes*, ou *gouvernes*, ou *contrôles*).

Remarque. La sortie est supposée scalaire (ou monodimensionelle) par commodité.

Deux asservissements sont dits *indiscernables* ssi, pour les mêmes entrées, on a les mêmes sorties. Soit l'asservissement

$$\begin{cases} q(t+1) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i\right) q(t) + b_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, b_i\,, \\ y(t) = \lambda q(t) + c. \end{cases} \tag{2.2}$$

Les symboles ont le même sens qu'en (2.1); $b_0, b_2, \ldots, b_n$ appartiennent à Q et c à K.

Proposition 1.[3] *Le système* (2.2) *est indiscernable d'un système régulier. Si l'espace d'état de* (2.2) *est de dimension finie N, on peut choisir le système régulier de dimension $N+1$.*

Preuve. Posons $Q^1 = Q \oplus K$. (2.2) est indiscernable de l'asservissement régulier, d'espace d'état Q^1, donné par

$$\begin{cases} q^1(t+1) = \left(A_0^1 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i^1\right) q^1(t), \\ y(t) = \lambda^1 q^1(t), \end{cases}$$

où

$$A_0^1 \begin{bmatrix} q \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 q + k b_0 \\ k \end{bmatrix}, \qquad A_i^1 \begin{bmatrix} q \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i q + k b_i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$q^1(0) = \begin{bmatrix} q(0) \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda^1 = (\lambda, c). \quad \blacksquare$$

Remarque. Si Q est de dimension finie, les diverses applications peuvent être repérées par des matrices. Il vient:

$$A_0^1 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & b_0 \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right], \qquad A_i^1 = \left[\begin{array}{c|c} A_i & b_i \\ \hline 0 \cdots & 0 \end{array}\right].$$

[3] Adaptation d'un résultat dû à Brockett (1972) pour les systèmes réguliers de dimension finie en temps continu.

COROLLAIRE. *La famille des systèmes réguliers contient strictement celle des linéaires stationnaires de la forme*

$$\begin{cases} q(t+1) = Fq(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) g_i, \\ y(t) = Hq(t), \end{cases}$$

d'espace d'état $Q(q(0) = 0)$, *ou* $g_1, \ldots, g_n \in Q$, *et* $F: Q \to Q$, $H: Q \to K$ *sont des applications* K*-linéaires.*

Remarque. Illustrons la non linéarité des asservissements réguliers par l'exemple suivant:

$$\begin{cases} q(t) = u(t)\, q(t), \\ y(t) = q(t), \end{cases}$$

d'espace d'état de dimension un ($q(0) = 1$). Il vient $y(t) = u(t-1) \cdots u(1)\, u(0)$. Cependant, ici, comme dans le cas général, il y a linéarité par rapport à la valeur $u(\tau)$ de l'entrée à l'instant τ.

2. SÉRIES GÉNÉRATRICES

(a) *Codage*

(i) *Entrée homogène.* Un système régulier est dit à *entrée homogène* ss'il est indiscernable d'un système de la forme

$$\begin{cases} q(t+1) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i\right) q(t), \\ y(t) = \lambda q(t). \end{cases} \tag{2.3}$$

LEMME. *Il y a bijection canonique entre séries formelles non commutatives et systèmes réguliers, à entrée homogène, définis à une indiscernabilité près.*

Preuve. (α) L'asservissement est donné. La sortie de (2.3) est

$$y(t+1) = \lambda \Big[\sum_{i_t, \ldots, i_0 = 1}^{n} A_{i_t} \cdots A_{i_0} u_{i_t}(t) \cdots u_{i_0}(0) \Big] q(0). \tag{2.4}$$

Guidé par (2.4), introduisons l'alphabet $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et la série $\mathrm{g} \in K\langle\langle X \rangle\rangle$, où $(\mathrm{g}, 1) = \lambda q(0)$, $(\mathrm{g}, x_{i_t} \cdots x_{i_0}) = \lambda A_{i_t} \cdots A_{i_0} q(0)$. Il vient:

$$y(t+1) = \sum_{i_t, \ldots, i_0 = 1}^{n} (\mathrm{g}, x_{i_t} \cdots x_{i_0})\, u_{i_t}(t) \cdots u_{i_0}(0).$$

Le coefficient de $x_{i_t} \cdots x_{i_0}$ est la sortie $y(t+1)$ pour les entrées:

$$u_{i_0}(0) = 1 \text{ et } u_{i'}(0) = 0 \text{ si } i' \neq i_0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{i_t}(t) = 1 \text{ et } u_{i'}(t) = 0 \text{ si } i' \neq i_t.$$

(β) La série est donnée. Soit (E, c, l) un module sériel gauche associé à $\mathfrak{g} \in K\langle\langle X\rangle\rangle$, où $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit le système de la forme (2.3), où $Q = E$, $q(0) = c$, $\lambda = l$ et où A_i est l'application induite par x_i:

$$\forall_Q q, \qquad A_i q = x_i q.$$

Le lien entre coefficients de $\mathfrak{g}$ et comportement entrée-sortie dy système est le même que celui de la première partie de la démonstration. Il en résulte que tout système régulier défini par un autre module sériel de $\mathfrak{g}$ est indiscernable du précédent. ▌

$\mathfrak{g}$ est dite série *génératrice* de (2.3).

(ii) *Entrée quelconque.* Au système (2.1), associons le système à entrée homogène

$$\rho(t+1) = \left(\sum_{j=0}^{n} u_j(t)\, A_j\right) \rho(t),$$
$$\eta(t) = \lambda\rho(t),$$

de même espace d'état ($\rho(0) = q(0)$), où $u_0: \mathbf{N} \to K$ est une nouvelle entrée.

LEMME. *Deux systèmes réguliers sont indiscernables si et seulement s'il en est ainsi des systèmes réguliers, à entrée homogène, associés.*

Preuve. (α) Si les asservissements à entrée homogène sont indiscernables, il en est évidemment de même des asservissements initiaux: il suffit de prendre $u_0 \equiv 1$.

(β) Réciproquement, soient

$$\begin{cases} q^{(k)}(t+1) = \left(A_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i^{(k)}\right) q^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(t) = \lambda^{(k)} q^{(k)}(t) \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

deux asservissements réguliers indiscernables. Il suffit de montrer l'identité des séries génératrices $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ en les indéterminées x_j ($j = 0, 1, \dots, n$) pour montrer l'indiscernabilité des asservissements à entrée homogène associés.

Par indiscernabilité à l'instant initial $t = 0$, il vient $(\mathfrak{g}_1, 1) = (\mathfrak{g}_2, 1)$. Procédons par récurrence. Supposons que, pour tout couple d'asservissements à entrée homogène associés à des asservissements réguliers indiscernables, il y ait, dans les séries génératrices, égalité des coefficients des mots de longueur inférieure ou égale à $l \geqslant 0$. Soit $x_j w$ un mot de longueur $l+1$. Les asservissements

$$\begin{cases} q^{(k)}(t+1) = \left(A_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i^{(k)}\right) q^{(k)}(t) \\ y_j^{(k)}(t) = \lambda_j^{(k)} q^{(k)}(t) \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

où $\lambda_j^{(k)} = \lambda^{(k)} A_j$, sont aussi indiscernables. Le coefficient de w dans les séries associées est identique à celui de $x_j w$ dans $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$. D'où $(\mathfrak{g}_1, x_j w) = (\mathfrak{g}_2, x_j w)$. Ce qui achève la démonstration. ▮

A tout système régulier, on associe ainsi la même série génératrice qu'au système à entrée homogène correspondant. Les deux lemmes précédents conduisent au résultat fondamental suivant:

THÉORÈME 2. *Il y a bijection canonique entre séries formelles non commutatives et systèmes réguliers, définis a une indiscernabilité près.*

La série, associée à l'asservissement, dont elle détermine le comportement entrée-sortie, est dite série génératrice de l'asservissement.

Remarques. (i) Il y a, en général, $n+1$ indéterminées lorsque l'entrée est de dimension n.

(ii) Le système (2.1) est à entrée homogène ssi le coefficient dans $\mathfrak{g}$ de tout $w \in X^*$ contenant au moins une occurence de x_0 ($|w|_{x_0} \geqslant 1$) est nul.

(iii) Si la sortie était vectorielle (ou multidimensionelle), et non plus scalaire, it faudrait prendre un vecteur de séries génératrices.

(iv) Le théorème reste valable si, au lieu d'un corps, on prend un anneau, où même un semi-anneau (cf. l'auteur (1974a)).

(b) *Réduction, accessibilité, observabilité*

Soit $(\bar{E}, \bar{c}, \bar{l})$ le $K\langle X\rangle$-module sériel gauche réduit de la série génératrice $\mathfrak{g}$ du système régulier (2.1). Associons-lui le système

$$\begin{cases} \bar{q}(t+1) = \left(\bar{A}_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, \bar{A}_i\right) \bar{q}(t), \\ y(t) = \bar{\lambda}\bar{q}(t), \end{cases} \tag{2.5}$$

d'espace d'état $\bar{Q} \simeq \bar{E}$ ($\bar{q}(0) = \bar{c}, \bar{\lambda} = \bar{l}$), où $\bar{A}_j$ ($j = 0, 1, \ldots, n$) est l'application induite par x_j:

$$\forall_{\bar{Q}}\bar{q}, \qquad x_j\bar{q} = \bar{A}_j\bar{q}.$$

Montrons que l'ensemble des vecteurs d'état accessibles à partir de $\bar{q}(0)$, à l'instant initial, sous-tend $\bar{Q}$. A l'instant 1, l'ensemble $(\bar{A}_0 + \sum u_i(0)\,\bar{A}_i)\,\bar{q}(0)$ sous-tend le même espace vectoriel que $\{\bar{A}_j\bar{q}(0) \mid j = 0, 1, \dots, n\}$. Supposons qu'à l'instant t, l'ensemble des vecteurs accessibles sous-tend le même espace que $\{\bar{A}_{j_{t-1}} \cdots \bar{A}_{j_0} q(0) \mid j_{t-1}, \dots, j_0 = 0, 1, \dots, n\}$. A l'instant $t + 1$, l'ensemble des vecteurs accessibles sous-tend le même espace que $\{(\bar{A}_0 + \sum u_i(t)\bar{A}_i)\,\bar{A}_{j_{t-1}} \cdots \bar{A}_{j_0}\bar{q}(0)\}$, donc que $\{\bar{A}_{j_t} \cdots \bar{A}_{j_0}\bar{q}(0)\}$.

Un système tel que l'espace d'état soit engendré par l'ensemble des vecteurs accessibles à partir de l'instant initial, est dit *semi-accessible*.

Soient $q_1, q_2 \in Q$ deux vecteurs d'état distincts du système (2.1). $(\sum_1)$ et $(\sum_2)$ sont deux systèmes réguliers identiques à (2.1), à ceci près qu'ils sont initialisés non par $q(0)$, mais respectivement par q_1 et q_2. (2.1) est dit *complètement observable* ssi, pour tout couple q_1, q_2, on a:

— soit $\lambda q_1 \neq \lambda q_2$;

— soit des entrées $\{u_i(\tau) \mid i = 1, \dots, n; \tau = 0, \dots, t\}$ telles que les sorties correspondantes y_1, y_2 de $(\sum_1)$, $(\sum_2)$ diffèrent: $y_1(t+1) \neq y_2(t+1)$.

Montrons que (2.5) est complètement observable. Soient $\bar{q}_1, \bar{q}_2 \in \bar{Q}$ $(\bar{q}_1 \neq \bar{q}_2)$ tels que $\bar{\lambda}\bar{q}_1 = \bar{\lambda}\bar{q}_2$. En vertu de la définition même des modules sériels réduits (Chap. I, Sect. 2b), il existe un mot $w \in X^*$ tel que

$$\bar{l}(w\bar{q}_1) \neq \bar{l}(w\bar{q}_2). \tag{2.6}$$

Comme pour l'accessibilité, on prouve que wq_1 et wq_2 peuvent être exprimés en combinaisons linéaires de vecteurs d'état accessibles à partir de q_1 et q_2, ce avec les mêmes entrées:

$$w\bar{q}_k = \sum_{\mu=1}^{s} \alpha_\mu^{(l)} \bar{q}_k^{\,\mu} \qquad (k = 1, 2;\ \bar{q}_1^{\,\mu} \text{ et } \bar{q}_2^{\,\mu} \text{ accessibles a partir de } \bar{q}_1 \text{et } \bar{q}_2 \text{ avec les mêmes entrées}).$$

En vertu de (2.6), il existe μ_0 tel que $\bar{\lambda}(\bar{q}_1^{\mu_0}) \neq \bar{\lambda}(\bar{q}_2^{\mu_0})$.

Réciproquement, supposons (2.1) semi-accessible et complètement observable. Le module sériel gauche associé (Chap. II, Sect. 1b) est, comme on le vérifie aisément, réduit.

Un système régulier est dit *réduit* (ou *minimal*) ss'il est associé à un module sériel gauche réduit.

Le théorème suivant reprend, avec quelques modifications,[4] les résultats classiques de Kalman (1968, 1969) sur les systèmes linéaires stationnaires de dimension finie.

THÉORÈME 3. (i) *Tout système régulier est réduit si et seulement s'il est semi-accessible et complètement observable.*

[4] La semi-accessibilité remplace la commandabilité (ou contrôlabilité).

(ii) *Tout système régulier est indiscernable d'un système régulier réduit*

$$\begin{cases} \bar{q}(t+1) = \left(\bar{A}_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, \bar{A}_i\right) \bar{q}(t), \\ y(t) = \bar{\lambda}\bar{q}(t), \end{cases}$$

d'espace d'état $\bar{Q}$. *Soit*

$$\begin{cases} q^1(t+1) = \left(A_0{}^1 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i{}^1\right) q^1(t), \\ y(t) = \lambda^1 q^1(t) \end{cases}$$

un système régulier, d'espace d'état Q^1, *indiscernable du précédent.*
Il existe un isomorphisme $i: Q^1 \to \bar{Q}$ *tel que*:

$$iA_j{}^1 = \bar{A}_j i \quad (j = 0, 1,..., n), \qquad iq^1(0) = \bar{q}(0), \quad \bar{\lambda} i = \lambda^1.$$

Les deux systèmes sont dits isomorphes.

Remarque. Le dimension de l'espace d'état d'un système régulier réduit est au plus dénombrable. En effet, dans le module sériel réduit $(\bar{E}, \bar{c}, \bar{l})$, $\bar{E}$ est sous-tendu par $\{w\bar{c} \mid w \in X^*\}$. On en déduit que toute système régulier est indiscernable d'un système de dimension au plus dénombrable.

La proposition suivante reprend les critères classiques de Kalman (1960, 1968, 1969, 1976) sur la commandabilité et l'observabilité.

Proposition 4. *Le système régulier*

$$\begin{cases} q(t+1) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i\right) q(t), \\ y(t) = \lambda q(t) \end{cases}$$

est:

— *semi-accessible si et seulement si la famille infinie de vecteurs*

$$\{q(0), A_0 q(0),..., A_n q(0),..., A_{j_t} \cdots A_{j_0} q(0),...\}$$

sous-tend l'espace d'état;

— *complètement observable si et seulement si la famille infinie*

$$\{\lambda, \lambda A_0, ..., \lambda A_n, ..., \lambda A_{j_t} \cdots A_{j_0}, ...\}$$

sous-tend le dual algébrique de l'espace d'état.

Preuve. (i) L'accessibilité est obtenue comme précédemment. L'ensemble $(A_0 + \sum u_i(0) A_i) q(0)$ des vecteurs d'état accessibles à l'instant 1 sous-tend le même espace que $\{A_j q(0) \mid j = 0, 1, ..., n\}$. Supposons qu'à l'instant t, l'ensemble des vecteurs accessibles sous-tende le même espace que $\{A_{j_{t-1}} \cdots A_{j_0} q(0)\}$. A l'instant $t + 1$, l'ensemble des vecteurs accessibles sous-tend le même espace que $\{(A_0 + \sum u_i(t) A_i) A_{j_{t-1}} \cdots A_{j_0} q(0)\}$, donc que $\{A_{j_t} \cdots A_{j_0} q(0)\}$.

(ii) Il y a génération du dual algébrique de l'espace d'état ssi pour tout couple q, q' de vecteurs d'état distincts, on peu trouver $\lambda A_{j_t} \cdots A_{j_0}$ tel que $\lambda A_{j_t} \cdots A_{j_0} q \neq \lambda A_{j_t} \cdots A_{j_0} q'$. Comme pour le théorème précédent, on en déduit des entrées permettant de distinguer q et q'. ∎

(c) *Dualité entre accessibilité et observabilité*

Pour les systèmes linéaires, Kalman (1960, 1968, 1969) a décrit une dualité entre commandabilité et observabilité. Nous allons montrer qu'il en est de même ici, en nous basant sur la dualité entre lignes et colonnes de la matrice de Hankel (Chap. I, Sect. 2d). A (2.1), associons le système régulier, dit *dual* ou *transposé* de (2.1), défini par:

$$\begin{cases} \eta(t+1) = \left({}^tA_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\,{}^tA_i\right) \eta(t), \\ y(t) = {}^tq(0)\, \eta(t), \end{cases} \tag{2.7}$$

d'espace d'état le dual algébrique de $Q(\eta(0) = {}^t\lambda)$, ou ${}^tA_j$, ${}^tq(0)$, ${}^t\lambda$ désignent les duaux ou transposés. (2.7) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{cases} r(t+1) = r(t) \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i\right), \\ y(t) = r(t)\, q(0), \end{cases}$$

où $r(0) = \lambda$.

La proposition précédente admet pour corollaire:

PROPOSITION 5. *Un système régulier est semi-accessible* (*resp. complètement observable*) *si et seulement si le système dual est complètement observable* (*resp. semi-accessible*).

(d) *Dimension finie*

Un système régulier est dit *réalisable* ss'il indiscernable d'un système régulier à espace d'état de dimension finie. Le théorème de Kleene-Schützenberger et le théorème 2 du Chap. II conduisent à énoncer:

THÉORÈME 6. *Un système régulier est réalisable si et seulement si sa série génératrice est rationnelle.*

La matrice de Hankel et le rang d'un système régulier sont, par définition, ceux de la série génératrice. Il vient (cf. théorème 3 du Chap. I):

THÉORÈME 7. *La dimension de l'espace d'état d'un système régulier réduit, réalisable est finie, égale au rang.*

Remarques. (i) Une description précise du système réduit en fonction de la matrice de Hankel se déduit du théorème 3 du Chap. I et de sa démonstration.

(ii) Pour les systèmes à entrée scalaire de la forme (cf. 2.2)

$$\begin{cases} q(t+1) = (A_0 + u_1(t) A_1) q(t) + u_1(t) b_1, \\ y(t) = \lambda q(t), \end{cases}$$

où $q(0) = 0$, Isidori (1973)[5] donne une description complète de la réalisabilité à partir de la matrice de Hankel.

La proposition 4 devient (cf. d'Alessandro, 1972; d'Alessandro *et coll.*, 1974):

PROPOSITION 8. *Le système régulier, d'espace d'état de dimension finie N,*

$$\begin{cases} q(t+1) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i\right) q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) \end{cases}$$

est:

— *semi-accessible si et seulement si la famille de vecteurs*

$$\{q(0), A_0 q(0), \ldots, A_{j_t} \cdots A_{j_0} q(0), \ldots \mid 0 \leqslant t \leqslant N-2\}$$

est de rang N;

— *complètement observable si et seulement si la famille de vecteurs*

$$\{\lambda, \lambda A_0, \ldots, \lambda A_{j_t} \cdots A_{j_0}, \ldots \mid 0 \leqslant t \leqslant N-2\}$$

est de rang N.

Preuve. Il suffit de remarquer que si $t_0 \geqslant 1$ est le plus petit indice tel que tout vecteur $A_{j_{t_0}} \cdots A_{j_0} q(0)$ soit linéairement dépendant de

$$\{q(0), \ldots, A_{k_t} \cdots A_{k_0} q(0), \ldots \mid 0 \leqslant \nu \leqslant t_0 - 2;\ k_0, \ldots, k_l = 0, 1, \ldots, n\},$$

alors, la famille de vecteurs serait de rang supérieur ou égal à t_0. ∎

[5] Contrairement à ce qui est parfois affirmé (cf. Isidori, 1974), cette forme n'est pas équivalente à celle considérée ici. Voir à ce sujet un article ultérieur.

Remarque. A la lumière des travaux de l'auteur (1974a) et de Sontag et Rouchaleau (1977), il serait possible d'aborder la réalisation des systèmes réguliers sur certains types d'anneaux. Mais, contrairement au cas linéaire (cf. Sontag, 1976a), il n'y a pas actuellement d'application connue.

III. APPLICATIONS

1. Systèmes réguliers non autonomes

(a) *Définition*

Un système

$$\begin{cases} q(t+1) = \left(A_0(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i(t)\right) q(t), \\ \quad y(t) = \lambda(t)\, q(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

est dit régulier *non autonome* (ou *variable*) ssi l'un au mains des opérateurs $A_0, A_1, \ldots, A_n$, λ dépend du temps t. Les asservissements réguliers, décrits jusqu'ici, étaient *autonomes*.

A l'instant $t+1$, la sortie de (3.1) est donnée par

$$y(t+1) = \lambda(t+1) \left[\sum_{j_t, \ldots, j_0 = 0}^{n} A_{j_t}(t) \cdots A_{j_0}(0)\, u_{j_t}(t) \cdots u_{j_0}(0) \right] q(0)$$

Comme à la Sect. 1.b du Chap. II, il en découle que l'on peut construire une série non commutative

$$\mathfrak{g} = \lambda(0)\, q(0) + \sum_{t \geqslant 0} \sum_{j_t, \ldots, j_0 = 0}^{n} \lambda(t+1)\, A_{j_t}(t) \cdots A_{j_0}(0)\, q(0)\, x_{j_t} \cdots x_{j_0},$$

qui décrit entièrement le comportement entrée-sortie de (3.1). D'après le théorème 2 du Chap. II, on peut associer à la série génératrice $\mathfrak{g}$ un asservissement régulier autonome, indiscernable de (3.1).

Proposition 1. *Tout système régulier non autonome est indiscernable d'un système régulier autonome.*

Remarques. (i) A partir d'un système non autonome d'espace d'état de dimension finie, on aboutit, en général, à un système autonome de dimension infinie.

(ii) La proposition 1 est analogue à un résultat de Dauscha *et coll.* (1973) sur les automates variables avec le temps.

(b) *Réalisabilité*

(3.1) est dit réalisable en tant que système non autonome ss'il est indiscernable d'un système régulier de dimension finie, non nécessairement autonome. Soit $\mathscr{H}$ la matrice de Hankel de (3.1). On note d_k la dimension du K-espace vectoriel $\mathfrak{C}_k$ engendré par les colonnes de $\mathscr{H}$ d'indice les mots de longueur k. Le *rang homogène* des colonnes de $\mathscr{H}$ est, par définition, $\max_{k\geqslant 0} d_k$.

PROPOSITION 2. *Un système régulier non autonome est réalisable en tant que tel si et seulement si le rang homogène des colonnes de la matrice de Hankel est fini, égal à $\bar{d}$. Il existe alors un système régulier, non nécessairement autonome, d'espace d'état de dimension $\bar{d}$, indiscernable du précédent. Tout autre système régulier indiscernable est de dimension supérieure ou égale à $\bar{d}$.*

Preuve. (i) S'il y a réalisabilité, on montre la finitude du rang homogène des colonnes comme celui du rang ordinaire pour la rationalité (Chap. I, Sect. 2c).

(ii) Supposons le rang homogène des colonnes fini, égal à $\bar{d}$. Soit D un K-espace vectoriel de dimension $\bar{d}$. $\mathfrak{C}$ désigne le K-espace vectoriel engendré par les colonnes de $\mathscr{H}$.

Soit φ_t: $\mathfrak{C}_t \to D$ un monomorphisme. L'image par φ_0 de la colonne indicée par le mot vide 1, est notée $q^D(0)$. En vertu de la structure de $K\langle X\rangle$-module gauche de $\mathfrak{C}$ (Chap. I, Section 2b), la lettre x_j ($j = 0, 1,\ldots, n$) induit un morphisme $\chi_{j,t}$: $\mathfrak{C}_t \to \mathfrak{C}_{t+1}$ ($t \geqslant 0$):

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dashed, "A_j^D(t)"] & D \\ \mathfrak{C}_t \arrow[u, "\varphi_t"] \arrow[r, "\chi_{j,t}"'] & \mathfrak{C}_{t+1} \arrow[u, "\varphi_{t+1}"'] \end{tikzcd}$$

Il existe un morphisme $A_j^D(t)$: $D \to D$ rendant le diagramme précédent commutatif. α: $\mathfrak{C} \to K$ associe à toute colonne le coefficient de la ligne d'indice le mot vide. Soient α_t la restriction à $\mathfrak{C}_t(\alpha_t = \alpha \mid \mathfrak{C}_t)$ et $\lambda^D(t)$: $D \to K$ tel que $\lambda^D(t)\,\varphi_t = \alpha_t$.

L'asservissement

$$\begin{cases} q^D(t+1) = \left(A^D(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i^D(t)\right) q^D(t), \\ y(t) = \lambda^D(t)\, q^D(t), \end{cases}$$

d'état initial $q^D(0)$, répond au problème.

(iii) Soit un asservissement de la forme (3.1), indiscernable du précédent, de dimension $d < \bar{d}$. Le K-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice de Hankel d'indice les mots de longueur k, aurait toujours une dimension inférieure ou égale à $\bar{d}$. C'est, en effet, un sous-espace de celui sous-tendu par les d colonnes dont les coefficients d'indice $x_{j_{t-1}} \cdots x_{j_0}$ sont ceux du d-uple $\lambda(t+k) A_{j_{t-1}}(t+k-1) \cdots A_{j_0}(k-1)$. D'où contradiction. ▮

Application. Soit le système à entrée scalaire

$$\begin{cases} q(t+1) = u(t) A(t) q(t), \\ y(t) = \lambda(t) q(t). \end{cases} \tag{3.2}$$

Le série génératrice $\mathfrak{g}$ est en une seule indéterminée x:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \lambda(0) q(0) + \sum_{t \geqslant 0} \lambda(t+1) A(t) \cdots A(0) q(0) x^t \\ &= \sum_{t \geqslant 0} g_t x^t. \end{aligned}$$

Le rang homogène des colonnes est un. Il y a indiscernabilité avec le système non nécessairement autonome

$$\begin{cases} r(t+1) = u(t) r(t) \qquad (r(0) = 1), \\ y(t) = g_t r(t) \end{cases}$$

d'espace détat de dimension un. Soulignons que (3.2) ne peut être autonome de dimension finie que si $\mathfrak{g}$ est rationnelle.

Remarques. (i) La proposition 2 est, modulo le passage par matrice de Hankel, identique à un résultat d'Agasandjan (1967) sur les automates variables (voir aussi Dauscha *et coll.*, 1973), dont l'application est inspirée).

(ii) Pour alléger l'exposé, on n'abordera pas accessibilité et observabilité.

2. Systèmes stationnaires

Un système est *stationnaire* ss'il est invariant par translation temporelle. En d'autres termes, le système est stationnaire ssi la sortie $y(t)$ donnée, par les entrées $\{u_i(\tau) \mid \tau = 0, 1, ..., t-1\}$, est égale à la sortie $y(t_0 + t)$ correspondant aux entrées

$$\begin{aligned} v_i(\sigma) &= 0 && \text{si} \quad \sigma = 0, ..., t_0 - 1, \\ &= u_i(\sigma - t_0) && \text{si} \quad \sigma = t_0, ..., t_0 + t - 1. \end{aligned}$$

En conservant les notations du Chap. II, Sect. 1b, on peut énoncer, d'après la définition même des séries génératrices:

PROPOSITION 3. *Une série génératrice* $\mathfrak{g} \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ *détermine un système régulier stationnaire si et seulement si pour tout mot* $w \in X^*$ *et tout entier* $k \geqslant 0$, *il vient*:

$$(\mathfrak{g}, w) = (\mathfrak{g}, wx_0^k).$$

Remarque. En particulier, $(\mathfrak{g}, x_0^k) = (\mathfrak{g}, 1)$.

Un vecteur d'état q est dit *point d'équilibre* du système régulier (2.1) ssi c'est un vecteur propre de A_0 relativement à la valeur propre 1.

PROPOSITION 4. *Une condition suffisante pour qu'un système régulier soit stationnaire est que le vecteur d'état initial soit point d'équilibre. Quand le système est réduit, cette condition est aussi nécessaire.*

Preuve. La suffisance est triviale. Soit un système réduit stationnaire, de $K\langle X\rangle$-module sériel gauche réduit $(\bar{E}, \bar{c}, \bar{l})$. Le fait d'être stationnaire implique, pour tout $w \in X^*$, $\bar{l}(wx_0\bar{c}) = \bar{l}(w\bar{c})$, d'où $x_0\bar{c} = \bar{c}$ (cf. Chap. I, Sect. 2b). Il en découle, en employant les notations de (2.5), $\bar{A}_0\bar{q}(0) = \bar{q}(0)$. ▮

3. LINÉARITÉ

(a) *Caractérisation générale*

Un système est dit linéaire ss'il définit une aplication linéaire entre les K-espaces vectoriels des entrées et des sorties, c'est-à-dire si le *principe de superposition* s'applique.

En conservant les notations du Chap. II, Sect. 1b, on peut énoncer d'après la définition même des séries génératrices:

PROPOSITION 5. *Une série génératrice* $\mathfrak{g} \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ *détermine un système régulier linéaire si et seulement si tout mot* $w \in X^*$, *de coefficient non nul, contient une et une seule occurence prise dans l'ensemble de lettres* $\{x_1, ..., x_n\}$.

Remarques. (i) Le *support* de $\mathfrak{g}$ est la partie (ou *langage*) de X^* définie par:

$$\operatorname{supp} \mathfrak{g} = \{w \mid (\mathfrak{g}, w) \neq 0\}.$$

On peut réécrire la condition précédente sous la forme

$$\operatorname{supp} \mathfrak{g} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{x_0\}^* x_i \{x_0\}^*.$$

(ii) Si l'on impose la linéarité par rapport à la seule entrée u_1, par example, on doit avoir:

$$(\mathfrak{g}, w) \neq 0 \Rightarrow |w|_{x_2} = 1,$$

ou

$$\operatorname{supp} \mathfrak{g} \subseteq \{x_0, x_2, \ldots, x_n\}^* x_1 (x_0, x_2, \ldots, x_n\}^*.$$

Supposons (2.1) linéaire. La proposition 5 permet d'affirmer qu'il est indiscernable de l'asservissement linéaire, non nécessairement autonome,

$$\begin{cases} \eta(t+1) = A_0 \eta(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i A_0{}^t q(0), \\ y(t) = \lambda q(t), \end{cases}$$

de vecteur d'état initial nul. L'expression $A_i A_0{}^t$ assure la présence d'un seul A_i dans les produits de matrices, donc d'un seul x_i dans les mots du support de la série génératrice.

(b) *Fonctions de transfert et séries génératrices*

En vertu des propositions 3 et 5, une série génératrice $\mathfrak{g} \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ détermine un système linéaire et stationnaire ssi elle s'écrit:

$$\mathfrak{g} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{t \geqslant 0} \alpha_{i,t} x_0{}^t \right) x_i \right] (1 - x_0)^{-1}.$$

Le coefficient $\alpha_{i,t}$ est égal à la sortie, à l'instant $t + 1$, pour l'impulsion initiale $u_i(0) = 1$, $u_{i'}(0) = 0$ $(i' \neq i)$, toutes les entrées ultérieures étant nulles. Il en découle que la matrice des fonctions de transfert du système est

$$\left(\sum_{t \geqslant 0} \alpha_{1,t}/z^{t+1}, \ldots, \sum_{t \geqslant 0} \alpha_{n,t}/z^{t+1} \right).$$

A un changement élémentaire de variables près, il y a donc identité entre fonctions de transfert et séries génératrices. L'outil proposé dans ce mémoire peut être considéré comme une généralisation non linéaire et (ou) non stationnaire de la transformation de Laplace discrète. Cela se retrouve en temps continu (cf. l'auteur, 1976).

(c) *Systèmes linéaires non autonomes*

Kalman (1969, Chap. X) a donné une condition simple pour la réalisabilité des systèmes linéaires non autonomes, en temps continu. Rien de semblable n'était connu en temps discret, en dépit de plusieurs tentatives (Weiss, 1972; Evans, 1972;...).

Soit le système linéaire, non nécessairement autonome, de dimension finie:

$$\begin{cases} \eta(t+1) = F(t)\,\eta(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, g_i(t) \qquad (\eta(0) = 0), \\ y(t) = H(t)\, n(t). \end{cases} \tag{3.3}$$

Comme au Chap. II, Sect. 1a, il est indiscernable de l'asservissement de forme (3.1) défini par:

$$A_0(t) = \left[\begin{array}{c|c} F(t) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right], \qquad A_i(t) = \left[\begin{array}{c|c} (0) & g_i(t) \\ \hline 0 \ \cdots \ 0 & \end{array}\right],$$

$$\lambda(t) = (H(t), 0).$$

Réciproquement, supposons qu'un système linéaire vérifie, en tant que régulier, la proposition 2 du Chap. III. Il peut alors être réalisé par un système régulier (3.1), de dimension finie, qui est indiscernable d'un asservissement de la forme (3.3) où $F(t) = A_0(t)$, $g_i(0) = q(0)$, $g_i(t) = A_i(t-1) \cdots A_i(0)\, q(0)$, $H(t) = \lambda(t)$. La proposition 2 a pour conséquence:

Proposition 6. *Un système linéaire non autonome est réalisable en tant que tel*[6] *si et seulement s'il est réalisable en tant que système régulier non autonome.*

Remarque. Pour ne pas alourdir cet article, nous n'étudierons ni la réduction, ni la commandabilité et l'observabilité (cf. Weiss, 1972).

4. Quelques autres systèmes non linéaires

Un asservissement est dit *quadratique* ss'il définit une application quadratique de l'espace des entrées dans celui des sorties. Comme dans le cas linéaire, on a:

Proposition 7. *Une série génératrice* $g \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ *détermine un système régulier quadratique si et seulement si tout mot* $w \in X^*$, *de coefficient non nul, contient deux occurences prises dans l'ensembles de lettres* $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Remarque. De façon équivalente, il vient

$$\operatorname{supp} g \subseteq \bigcup_{i,i'=1}^{n} \{x_0\}^* x_i \{x_0\}^* x_{i'} \{x_0\}^*.$$

[6] C'est-à-dire indiscernable d'un système de dimension finie de la forme (3.3).

Tout système d'entrée scalaire u_1 peut être écrit "à la Volterra" (cf. Alper, 1964):

$$y(t) = \sum_{0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant t} h(t, \tau_2, \tau_1)\, u(\tau_2)\, u_1(\tau_1),$$

où $h\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to K$ est une fonction de trois variables. Il lui correspond une série génératrice $\mathfrak{g} \in K\langle\langle x_0, x_1\rangle\rangle$ ssi l'égalité de deux des trois variables implique la nullité de h. On a alors

$$(\mathfrak{g}, x_0^{t-\tau_2} x_1 x_0^{\tau_2-\tau_1} x_1 x_0^{\tau_1}) = h(t, \tau_2, \tau_1).$$

Cette relation est analogue à celle existant en temps continu (cf. l'auteur, 1976).

Remarques. (i) Le relation

$$y(t) = u_1^2(t-1) + u_1(t-1)\, u_1(t-2)$$

définit un système quadratique que l'on ne peut représenter par une série génératrice au sens de cet article. Il faudrait introduire une nouvelle indéterminée qui code u_1^2 en plus de celle codant déjà u_1. C'est cette généralisation qui est à la base de la théorie de Sontag (1976b).

(ii) Le théorie de la réalisation de systèmes non linéaires, autres que réguliers, est encore peu développée. Signalons cependant les systèmes dits *polynômiaux* (Sontag et Rouchaleau, 1976) et ceux liés au codage juste mentionné (Sontag, 1976b).

(iii) Supposons que K soit le corps des réels. Il a été dit dans l'introduction qu'en temps discret, tout système non linéaire ne peut être arbitrairement approché par des réguliers. On le vérifie avec l'exemple $y(t) = u_1^2(t-1)$. Cependant, le théorème d'approximation de Stone–Weierstrass permet d'énoncer[7]:

Sur un intervalle de temps fini et pour des entrées bornées en valeur absolue, tout système non linéaire peut être arbitrairement approché par des systèmes linéaires suivis en série de systèmes instantanés polynômiaux.

Ce résultat reste valide en temps continu.

RECEIVED: July 8, 1977; REVISED: November 14, 1977

BIBLIOGRAPHIE

AGASANDJAN, G. A. (1967), Automata with a variable structure, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **174**, 529–530 (en russe avec résumé en anglais).

[7] Remarque due à E. D. Sontag (communication personnelle).

D'ALESSANDRO, P. (1972), Structural properties, invariance and insensivity of discrete-time bilinear systems, *Ricerche di Automatica* **3**, 158–169.

D'ALESSANDRO, P., ISIDORI, A., ET RUBERTI, A. (1974), Realization and structure theory of bilinear dynamical systems, *SIAM J. Control* **12**, 517–535.

ALPER, P. (1964), Higher-dimensional *Z*-transforms and non-linear discrete systems, *Revue A* (Bruxelles) **6**, 199–212.

BROCKETT, R W. (1972), On the algebraic structure of bilinear systems, *in* "Theory and Applications of Variable Structure Systems" (R. R. Mohler et A. Ruberti, Eds.), pp. 153–168, Academic Press, New York.

BROCKETT, R. W., ET WILLSKY, A. S. (1972), Finite group homomorphic sequential systems, *IEEE Trans. Automatic Control* **17**, 483–490.

DAUSCHA, W., NÜRNBERG, G., STARKE, P. H., ET WINKLER, K. D. (1973), Theorie der determinierten zeitvariablen Automaten, *Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik.* **9**, 455–511.

EILENBERG, S. (1974), "Automata, Languages and Machines," Vol. A, Academic Press, New York.

EVANS, D. S. (1972), Finite-dimensional realizations of discrete-time weighting patterns, *SIAM J. Appl. Math.* **22**, 45–67.

FLIESS, M. (1973), Sur la réalisation des systèmes dynamiques bilinéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **A-277**, 923–926.

FLIESS, M. (1974a), Matrices de Hankel, *J. Math. Pures Appl.* **53**, 197–222. Erratum (1975) **54**, 481.

FLIESS, M. (1974b), Sur les systèmes dynamique bilinéaires qui sont linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris A* **278**, 1147–1149.

FLIESS, M. (1974c), Sur la réalisation des systèmes dynamiques bilinéaires non autonomes, à temps discret; application aux systèmes linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris A* **279**, 243–246.

FLIESS, M. (1974d), Une approche nouvelle de certains systèmes dynamiques utilises en ingéniérie, *Cahiers Math.* (Montpellier) **3**, 11–23.

FLIESS, M. (1976), Un outil algébrique: les séries formelles non commutatives, *in* "Mathematical Systems Theory" (G. Marchesini et S. K. Mitter, Eds.), pp. 122–148, Lect. Notes Econom. Math. Syst., Vol. 131, Springer-Verlag, Berlin.

HELLER, A. (1967), Probabilistic automata and stochastic transformations, *Math. Systems Theory* **1**, 197–208.

ISIDORI, A. (1973), Direct construction of minimal bilinear realizations from nonlinear input–output maps, *IEEE Trans. Autom. Contr.* **18**, 626–631.

ISIDORI, A. (1974), New results on the abstract realization theory of nonlinear input-output functions, *Ricerche di Automatica* **5**, 1–10.

KALMAN, R. E. (1960), On the general theory of control systems, *in* "Proceedings of the First IFAC Congress (Moscow)," pp. 481–492, Butterworths, London.

KALMAN, R. E. (1968), "Lectures on Controllability and Observability," CIME Summer Course, Cremonese, Rome.

KALMAN, R. E. (1976), Realization theory of linear dynamical systems, *in* "Control Theory and Topics in Functional Analysis" (A. Salam, Ed.), Vol. II, pp. 235–256, International Atomic Energy Agency, Vienna.

KALMAN, R. E., FALB, P. L., ET ARBIB, M. A. (1969), "Topics in Mathematical System Theory," McGraw–Hill, New York.

SCHÜTZENBERGER, M. P. (1961), On the definition of a family of automata, *Inform. Contr.* **4**, 245–270.

SONTAG, E. D. (1976a), Linear systems over commutative rings: A survey, *Ricerche di Automatica* **7**, 1–34.

SONTAG, E. D. (1976b), "On the Realization Theory of Polynomial Input–Output Maps," Ph.D. Thesis, University of Florida, Gainesville.

SONTAG, E. D., ET ROUCHALEAU, Y. (1976), On discrete-time polynomial systems, *Non-Linear Analysis: Theory, Methods Appl.* **1**, 55–64.

SONTAG, E. D., ET ROUCHALEAU, Y. (1977), Sur les anneaux de Fatou forts, *C. R. Acad. Sci. Paris A* **284**, 331–333.

WEISS, L. (1972), Controllability, realization and stability of discrete-time systems, *SIAM J. Control* **10**, 230–251.